離散付値環の上の群スキームの拡大の例(群スキームの変形と整数論への応用)

AUTHOR(S):

大野, 俊明

数理解析研究所講究録
942巻 1996年 93-97

離散付値環の上の群スキームの拡大の例

中央大理工　大野俊明 (Toshiaki Ohno)

1 Introduction

A を離散付値環、$\mathfrak{m}$ をその極大イデアル、Kを A の商体、kを A の剰余体とする。
B/A を不分岐2次拡大とする。$B=A[\theta]/(\theta^2-m\theta+n)$ と表す。ただし、$m,n\in A$ 、$m^2-4n\in A^\times$。
$\mathbb{G}_{m,A}$を A 上の乗法群、$\mathcal{G}^{(\lambda)}$をそのモデルとすると

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_{m,A} &= \mathrm{Spec}A[T,T^{-1}]\\ \mathcal{G}^{(\lambda)} &= \mathrm{Spec}A[X,(\lambda X+1)^{-1}]\end{aligned}$$

ただし、$\lambda(\neq 0)\in A$ (cf. [1], 2.5)。
G を $\mathbb{G}_m$ の自明でない B/A-form 、$\mathcal{G}$を G のモデルとすると

$$\begin{aligned}G &= \mathrm{Spec}A[\tau,\xi]/(\tau^2-m\tau\xi+n\xi^2+m^2-4n)\\ \mathcal{G} &= \mathrm{Spec}A[w,v]/(\lambda(w^2-mwv+nv^2)-(m^2-4n)v)\end{aligned}$$

ただし、$\lambda(\neq 0)\in A$ (cf. [1], 2.6)。
また、$\prod_{B/A}\mathbb{G}_m$を $\mathbb{G}_m$ の Weil restrection とすると

$$\prod_{B/A}\mathbb{G}_m=\mathrm{Spec}A[X,Y,Z]/(Z(X^2+mXY+nY^2)-1)$$

$\mathcal{G}^{(\lambda)}$に関する拡大のいくつかは関口、諏訪によって与えられている。例えば、$Ext^1(\mathcal{G}^{(\lambda)},\mathcal{G}^{(\mu)})$ 等 (cf. [3], [4], [5], [6])。また、Weisfeiler は $Ext^1(\mathcal{G}^{(\lambda)},\mathbb{G}_{a,A})$ を計算している (cf. [2])。

ここでは、$Ext^1(\mathcal{G},\mathbb{G}_{m,A})$ と $Ext^1(\mathcal{G}^{(\lambda)},G)$ が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に同型であることを示し、自明でない元がいずれも$\prod_{B/A}\mathbb{G}_m$ のモデルとして得られることを述べる (2節)。なお、定理2.1は諏訪により予想されている。また、$Ext^1(\mathcal{G},G)=0$ を用い、3節において、長さ2の Witt 群 W_2から $G\times G$ への変形を議論する。

最後に、関口先生と諏訪先生の多くの助言に対して、感謝の意を表したい。

2 $Ext^1(\mathcal{G},\ \mathbb{G}_{m,A})$, $Ext^1(\mathcal{G}^{(\lambda)},G)$

簡単な計算により、以下のことがわかる。

$$\begin{aligned}Ext^1(G,\mathbb{G}_{m,A}) &\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\\ Ext^1(\mathbb{G}_{m,A},G) &\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\end{aligned}$$

自明でない元は、それぞれ$\prod_{B/A}\mathbb{G}_m$で、

$$0 \to \mathbb{G}_{m,A} \to \prod_{B/A} \mathbb{G}_m \to G \to 0$$

$$0 \to G \to \prod_{B/A} \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_{m,A} \to 0$$

である。

実は、これらの拡大は次のように拡張できる。

定理 2.1 (cf. [7], 4.1)

$$Ext^1(\mathcal{G}, \mathbb{G}_{m,A}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

自明でない元は$\prod_{B/A}\mathbb{G}_m$の中の $\mathbb{G}_{m,k}$を何回か Néron blow-up して得られる。

$$0 \to \mathbb{G}_{m,A} \xrightarrow{\alpha} \overline{\prod_{B/A} \mathbb{G}_m} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \to 0$$

ここで、

$$\overline{\prod_{B/A} \mathbb{G}_m} = \mathrm{Spec}A[X,Y,Z]/(Z(X^2 + m\lambda XY + n\lambda^2 Y^2) - 1)$$

である。ただし、$\lambda(\neq 0) \in A$ 。
準同型α, βは、次のα^*, β^*によって定義される (cf. [1], 3.1) 。

$$\begin{aligned}
\alpha^* : A[X,Y,Z]/&(Z(X^2 + m\lambda XY + n\lambda^2 Y^2) - 1) \\
&\to A[T, T^{-1}] \\
(X,Y,Z) &\mapsto (T, 0, T^{-2}) \\
\beta^* : A[w,v]/&(\lambda(w^2 - mwv + nv^2) - (m^2 - 4n)v) \\
&\to A[X,Y,Z]/(Z(X^2 + m\lambda XY + n\lambda^2 Y^2) - 1) \\
(w, -v) &\mapsto (XYZ, Y^2 Z)
\end{aligned}$$

定理 2.2 (cf. [7], 4.2)

$$Ext^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

自明でない元は$\prod_{B/A}\mathbb{G}_m$の中の G_kを何回か Néron blow-up して得られる。

$$0 \to G \xrightarrow{\gamma} \underline{\prod_{B/A} \mathbb{G}_m} \xrightarrow{\delta} \mathcal{G}^{(\lambda)} \to 0$$

ここで、

$$\underline{\prod_{B/A} \mathbb{G}_m} = \mathrm{Spec}A[X,Y,Z,(\lambda Z+1)^{-1}]/(X^2 + mXY + nY^2 + (m^2 - 4n)(\lambda Z + 1))$$

である。ただし、$\lambda(\neq 0) \in A$ 。
準同型γ, δは、次のγ^*, δ^*によって定義される。

$$\begin{aligned}
\gamma^* &: A[X,Y,Z,(\lambda Z+1)^{-1}]/(X^2+mXY+nY^2+(m^2-4n)(\lambda Z+1)) \\
&\qquad\qquad \to A[\tau,\xi]/(\tau^2-m\tau\xi+n\xi^2+m^2-4n) \\
&\quad (X,Y,Z) \mapsto (\tau,-\xi,0) \\
\delta^* &: A[X,(\lambda X+1)^{-1}] \\
&\quad \to A[X,Y,Z,(\lambda Z+1)^{-1}]/(X^2+mXY+nY^2+(m^2-4n)(\lambda Z+1)) \\
&\quad X \mapsto Z
\end{aligned}$$

3 W_2から$G \times G$への変形

定理 3.1 (cf. [7], 4.3)

$$Ext^1(\mathcal{G}, G) = 0$$

ここで、$\mathcal{G}'$を

$$\mathcal{G}' = \mathrm{Spec}A[w,v]/(\mu(w^2-mwv+nv^2)-(m^2-4n)v)$$

とし ($\mu(\neq 0) \in A$) 、短完全系列 (cf. [7], 2.3)

$$0 \to \mathcal{G}' \to G \to i_* G_{A/(\mu)} \to 0$$

から ($i : \mathrm{Spec}A/(\mu) \hookrightarrow \mathrm{Spec}A$) 、長完全系列

$$\begin{aligned}
0 \quad &\to Hom_{A-gr}(\mathcal{G},\mathcal{G}') \to Hom_{A-gr}(\mathcal{G},G) \xrightarrow{r} Hom_{A-gr}(\mathcal{G}, i_* G_{A/(\mu)}) \\
&\to Ext^1(\mathcal{G},\mathcal{G}') \to Ext^1(\mathcal{G},G) \to \qquad \cdots
\end{aligned}$$

を得、これに定理 3.1 を適用することにより、次の定理を得る。

定理 3.2 (cf. [8], 2.1)

$$Ext^1(\mathcal{G},\mathcal{G}') \simeq M/N$$

ここで、M, Nは

$$\begin{aligned}
M \;&=\; \{F(X) \mid F(X) \in B/(\mu)[X]^\times, \\
&\qquad\quad F_1(v,w)\ ,\ F_2(v,w)\ \in A/(\mu)[v,w], \\
&\qquad\quad F(X\otimes 1 + 1\otimes X + \lambda X\otimes X) = F(X)\otimes F(X)\} \\
N \;&=\; \{a(\lambda X+1)^n \mid n \in \mathbb{Z}\ ,\ a \in B^\times\ , \\
&\qquad\quad a(\lambda X+1)^n + a^{-1}(\lambda X+1)^{-n}\ , \\
&\qquad\quad \theta a(\lambda X+1)^n + (m-\theta)a^{-1}(\lambda X+1)^{-n}\ \in A[v,w]\}
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} F_1(v,w) &= F(X)+F(X)^{-1} \\ F_2(v,w) &= \theta F(X)+(m-\theta)F(X)^{-1} \end{aligned}$$

F_1と F_2は $Ext^1(\mathcal{G},\mathcal{G}')$ の元を定める。それを $E^{(\lambda,\mu;F_1,F_2)}$ と書くことにすると、次の命題を得る。

命題 3.3 (cf. [8], 2.2)

$$E^{(\lambda,\mu;F_1,F_2)} = \mathrm{Spec}A[v,w,v',w']/(P,Q)$$

ただし、

$$\begin{aligned} P &= \lambda(nv^2-mvw+w^2)-(m^2-4n)v \\ Q &= \mu^2(nv'^2-mv'w'+w'^2) \\ &\quad +\mu\{[2nF_1(v,w)-mF_2(v,w)]v'+[2F_2(v,w)-mF_1(v,w)]w'\} \\ &\quad +nF_1(v,w)^2-mF_1(v,w)F_2(v,w)+F_2(v,w)^2+m^2-4n \end{aligned}$$

群演算は、

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}A[v,w,v',w']/(P,Q) & \to & G\times G \\ (v_1\ ,\ w_1\ ,\ v'_1\ ,\ w'_1) & \mapsto & (\lambda v_1+2\ ,\ \lambda w_1+m\ ,\ \mu v'_1+F_1(v_1,w_1)\ ,\ \mu w'_1+F_2(v_1,w_1)) \end{array}$$

を群準同型にするものとして定義される。

次に、関口の定義した多項式$\phi(b,\lambda;X)$ の説明をする。
$b,\lambda\in \mathfrak{m}\backslash\{0\}$ に対して、

$$\begin{aligned} (b/\lambda)!_i &= b(b-\lambda)(b-2\lambda)\cdots(b-(i-1)\lambda) \\ \begin{bmatrix} b/\lambda \\ i \end{bmatrix} &= \lambda^i\begin{pmatrix} b/\lambda \\ i \end{pmatrix} = \frac{(b/\lambda)!_i}{i!} \qquad for \quad i=1,2,3,\cdots \end{aligned}$$

とおく。そして、

$$\phi(b,\lambda;X)=1+\begin{bmatrix} b/\lambda \\ 1 \end{bmatrix}X+\cdots+\begin{bmatrix} b/\lambda \\ p-1 \end{bmatrix}X^{p-1}$$

と定義する。ただし、$i=0$ のときは

$$(b/\lambda)!_0=\begin{bmatrix} b/\lambda \\ 0 \end{bmatrix}=1$$

とする。

ここで、

$$\begin{aligned} \phi_1(b,\lambda;v,w) &= \phi(b,\lambda;X)+\phi(b,\lambda;X)^{-1} \\ \phi_2(b,\lambda;v,w) &= \theta\phi(b,\lambda;X)+(m-\theta)\phi(b,\lambda;X)^{-1} \end{aligned}$$

とおけば、

$$\phi_1(b,\lambda;v,w)\ ,\ \phi_2(b,\lambda;v,w)\ \in A/(\mu)[v,w]$$

の条件を満たす$\phi(b,\lambda;X)$ は $E^{(\lambda,\mu;\phi_1,\phi_2)}$を定める。
例えば、$p=2$ のときは、$b,\lambda\in\mathfrak{m}\backslash\{0\}$ に対して、

$$\phi(b,\lambda;X)=1+bX$$

とできて、

$$\begin{aligned}\phi_1(b,\lambda;v,w) &= 2+bv\\ \phi_2(b,\lambda;v,w) &= m+bw\end{aligned}$$

となる。

以上の下に、次の命題が得られる。

命題 3.4 (cf. [8], 3.2) A を混標数、$\mu|p$ と仮定する。$\mu|(b/\lambda)!_p$の条件の下で、次の 2 つは同値。
(i) $(b/\lambda)!_p/\mu\not\equiv 0 \bmod \mathfrak{m}$
(ii) $E_s^{(\lambda,\mu;\phi_1,\phi_2)}\simeq W_2$
ただし、$E_s^{(\lambda,\mu;\phi_1,\phi_2)}$は $E^{(\lambda,\mu;\phi_1,\phi_2)}$の special fibre を表すものとする。

参考文献

[1] W.C.Waterhouse and B.Weisfeiler, One-dimensional affine group schemes, J.Algebra 66(1980), 550-568.

[2] B.Weisfeiler, On a case of extensions of group schemes, Trans. Amer. Math. Soc. 248, No.1(1979), 171-189.

[3] T.Sekiguchi, On the Deformations of Witt Groups to Tori II, J. Algebra 138(1991), 273-297.

[4] T.Sekiguchi and N.Suwa, A case of Extensions of Group Schemes over a Discrete Valuation Ring, Tsukuba J. Math 14, No.2(1990), 459-487.

[5] T.Sekiguchi and N.Suwa, Some cases of Extensions of Group Schemes over a Discrete Valuation Ring I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. 38(1991), 1-45.

[6] T.Sekiguchi and N.Suwa, Some cases of Extensions of Group Schemes over a Discrete Valuation Ring II, Bull. Facul. Sci. & Eng. CHUO UNIVERSITY 32(1989), 17-35.

[7] T.Ohno, Some cases of Extensions of twisted Group Schemes over a Discrete Valuation Ring, preprint

[8] T.Ohno, On the Deformations of Witt Groups to twisted Tori, preprint